数理解析研究所講究録
第 1639 巻 2009 年 88-94

Zeros and the universality for the Euler-Zagier-Hurwitz type of multiple zeta-functions

九州大学大学大学院数理学研究院　中村隆

1 導入

このセクションでは，Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ と Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s;\alpha)$ の零点の研究について簡単にまとめ，次にゼータ関数の普遍性について述べる．最後に Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数を定義し，その性質を記述する．ゼータ関数の零点の研究については [3]，ゼータ関数の普遍性に関しては [6], 多重ゼータ関数の解析的性質については [4] を参照して頂きたい．

1.1 ゼータ関数の零点

Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}, \qquad \Re(s)>1$$

はオイラー積表示から $1<\sigma:=\Re(s)$ で零点を持たないことはすぐにわかる．

その一方で Hurwitz ゼータ関数

$$\zeta(s;\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^s}, \qquad \Re(s)>1, \quad 0<\alpha\leq 1$$

については $\alpha\neq 1/2, 1$ であるとき，次の定理が知られている．

Theorem A (Davenport, Heilbronn and Cassels). *Hurwitz* ゼータ関数 $\zeta(s;\alpha)$ は絶対収束領域 $1<\sigma$ で無限個の零点を持つ．

これは $\alpha\neq 1/2, 1$ が超越数または有理数であるときは，Davenport と Heilbronn により，α が代数的無理数の場合は Cassels により証明された．

次に問題になるのは，Critical strip $D:=\{s\in\mathbb{C}: 1/2<\Re(s)<1\}$ における零点である．Riemann ゼータ関数の零点についてはリーマン予想と呼ばれる難問としてよく知られている．Hurwitz ゼータ関数の零点については次の定理が成り立つ

Theorem B (Bagchi and Gonek). $\alpha\neq 1/2, 1$ が超越数または有理数ならば，$1/2<\sigma_*<\sigma_\star<1$ なる任意の $\sigma_*, \sigma_\star$ に対し，$\zeta(s;\alpha)$ は帯領域 $\sigma_*<\sigma<\sigma_\star$ で無限個の零点を持つ．

それは次のサブセクションで述べる普遍性定理 Theorem E と F により証明される（証明については [2, Section 8.4] 参照）．

1.2 ゼータ関数の普遍性

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ に対して，$\sigma > 1$ では

$$\zeta(\sigma)^{-1} \le |\zeta(s)| \le \zeta(\sigma)$$

となる．しかし $\sigma \le 1$ ではこのような簡単な評価はできず，実は次の定理が成り立つ．

Theorem C (Bohr and Courant). 任意に固定した $1/2 < \sigma < 1$ に対し，$\{\zeta(\sigma+it) : t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ で稠密である．

この結果の関数空間への拡張が，ゼータ関数の普遍性と呼ばれるものである．普遍性定理の歴史，証明，一般化等については [1], [3], [6] を参照して頂きたい．

meas(A) で集合 A の Lebesgue 測度とし，$\nu_T\{\ldots\} := T^{-1}\mathrm{meas}\{\tau \in [0,T] : \ldots\}$, $\ldots$ の部分には τ が充たす条件が書かれる．K と $K_1,\ldots,K_m$ を D に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする．

Theorem D (Voronin). $f(s)$ を K 上で連続で零点を持たず，K の内部で正則な関数とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\Big\{\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

この定理は普遍性定理（universality theorem）と呼ばれるものであり，おおまかに言えば，零点を持たない任意の正則関数はゼータ関数の平行移動により一様に近似でき，しかも近似できる τ の密度は正であることを意味する．$\log\zeta(s)$ の普遍性により $\zeta(s)$ の普遍性を証明するので $f(s)$ が零点を持たないという仮定が必要になる．

次の定理は同時普遍性定理（joint universality theorem）と呼ばれるものである．

Theorem E (Voronin, Bagchi and Gonek). $f_l(s)$ を K_l 上で連続で零点を持たず，K_l の内部で正則な関数とする．$\chi_1,\ldots,\chi_m$ を互いに非同値な *Dirichlet* 指標とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\Big\{\sup_{1\le l\le m}\sup_{s\in K_l}\big|L(s+i\tau,\chi_l) - f_l(s)\big| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

この定理は，零点を持たない任意の正則関数の組は，非同値な Dirichlet L 関数 $L(s,\chi)$ の平行移動により一様に近似でき，近似できる τ の密度は正であることを意味する．

Hurwitz ゼータ関数の普遍性定理については次のものがある．Hurwitz ゼータ関数はオイラー積を持たないこと，近似される関数に零点を持たないという仮定が必要ないことを注意しておく．

Theorem F (Bagchi and Gonek). α を超越数とする．$f(s)$ を K 上で連続で K の内部で正則な関数とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\Big\{\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau\,;\alpha) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

現在では数多くのゼータ関数が普遍性を持つことが証明されている．

1.3 Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数

Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数を以下で定義する.

$$\zeta_r(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}) := \sum_{n_1>n_2>\cdots>n_r\geq 0} \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{s_1}(n_2+\alpha_2)^{s_2}\cdots(n_r+\alpha_r)^{s_r}},$$

ただし $s_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in (0,1]$, $1 \leq j \leq r$ とする. この級数は領域 $\Re(s_1) > 1$ かつ $\Re(s_j) \geq 1$, $2 \leq j \leq r$ で絶対収束し, 全 $\mathbb{C}^r$ 平面に有理型に解析接続される. $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 1$ であるとき上の関数を Euler-Zagier 多重ゼータ関数と呼び, さらに $s_1, \ldots, s_m$ が整数であるときは多重ゼータ値と呼ばれるものであり, 多くの数学者によって研究されている. 多重ゼータ関数の解析接続についても, 数多くの研究者, 例えば秋山氏, 荒川氏, 江上氏、石川氏, 金子氏, 松本氏, 谷川氏, Zhao 氏らによって研究された. ここでは Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数の解析接続として次の定理を挙げておく.

Lemma 1.1 (Akiyama, Ishikawa). $\zeta_r(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})$ は以下の集合上

$$s_1 = 1, \quad \sum_{j=1}^{k} s_j \in \mathbb{Z}_{\geq k}, \quad (k = 2, 3, \ldots, r)$$

に限り, *possible singularities* を持つ.

2 主結果

ここでは主結果について述べる. $s_2, \ldots, s_r$ を固定したとき $\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\ldots,r)}\,;\alpha_2, \alpha_{(3,\ldots,r)}) \neq 0$ であれば, Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数 $\zeta_r(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})$ は s_1 について普遍性を持つというものである. さらにその逆も成り立つというのが主結果の概要である. もちろん Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数の普遍性からよく知られている手法により関数の独立性なども得られる.

2.1 普遍性と零の関係

Theorem 2.1. $(\alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in (0,1]^{r-1}$ と $(s_2, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^{r-1}$, ただし $\Re(s_2) > 3/2$, $\Re(s_j) \geq 1$, $3 \leq j \leq r$ を固定する. $0 < \alpha_1 < 1$ は超越数とし $f(s_1)$ は K の内部で正則で, K で連続とする. $\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\ldots,r)}\,;\alpha_2, \alpha_{(3,\ldots,r)}) \neq 0$ であれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\Big\{\sup_{s_1\in K}\big|\zeta_r(s_1+i\tau, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}) - f(s_1)\big| < \varepsilon\Big\} > 0. \tag{2.1}$$

$0 < \alpha_1 < 1$ は超越数であるが, $(\alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in (0,1]^{r-1}$ には条件は必要ないことに注意する. $\Re(s_j) \geq 1$, $2 \leq j \leq r$ が十分大きく, $\alpha_j \geq 0$, $2 \leq j \leq r$ が 0 に近ければ, 実軸の近くで $\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\ldots,r)}\,;\alpha_2, \alpha_{(3,\ldots,r)}) \neq 0$ なることは級数表示からすぐにわかる.

上の定理は $\zeta_{r-1} \neq 0$ であれば，ζ_r が普遍性を持つことを示している．次の定理はその逆を示している．

Theorem 2.2. $\zeta_r(s_1 + i\tau, s_{(2,\dots,r)}; \alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)})$ が $1 - \delta < \Re(s_1) < 1$, $\Re(s_2) > 1 + \delta$, $\Re(s_j) \geq 1$, $3 \leq j \leq r$, $0 < \delta \leq 1/2$ において，上記の意味で普遍性を持つならば，$\Re(s_2) > 1 + \delta$, $\Re(s_j) \geq 1$ で $\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\dots,r)}; \alpha_2, \alpha_{(3,\dots,r)}) \neq 0$.

この定理の対偶を考えることにより，$\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\dots,r)}; \alpha_2, \alpha_{(3,\dots,r)}) = 0$ であれば，Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数 $\zeta_r(s_1, s_{(2,\dots,r)}; \alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)})$ は普遍性を持たないことがわかる．Linnik と Ibragimov は自明な例外（例えば $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-s}$）を除き全ての Dirichlet 級数は普遍性を持つと予想していた．$\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\dots,r)}; \alpha_2, \alpha_{(3,\dots,r)}) = 0$, $\Re(s_2) > 1+\delta$, $\Re(s_j) \geq 1$, $3 \leq j \leq r$, $0 < \delta \leq 1/2$ を充たす $s_2, \dots, s_r$ を決定することは困難であること（命題 3.2 から零の存在は証明される）を考えれば，定理 2.2 は非自明な普遍性を持たないゼータ関数の例と言っても良いのかもしれない．しかし定理 2.2 の証明からわかることであるが，$\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\dots,r)}; \alpha_2, \alpha_{(3,\dots,r)}) = 0$ であるとき $\zeta_r(s_1, s_{(2,\dots,r)}; \alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)})$ は $s_1 \in D$ で有界になるので，普遍性を持たない自明な例とも言える（$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-s}$ と比較すれば，Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数 $\zeta_r(s_1, s_{(2,\dots,r)}; \alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)})$ の有界性は自明でない）．

定理 2.1 の拡張として，次の同時普遍性定理が成り立つ．

Theorem 2.3. $(\alpha_{2l}, \dots, \alpha_{rl}) \in (0,1]^{rl-1}$ と $(s_{2l}, \dots, s_{rl}) \in \mathbb{C}^{rl-1}$, ただし $\Re(s_{2l}) > 3/2$, $\Re(s_{jl}) \geq 1$, $3l \leq jl \leq rl$, $1 \leq l \leq m$ を固定する．$0 < \alpha_{1l} < 1$ は代数的独立とし $f_l(s_1)$ は K_l の内部で正則で K_l で連続とする．このとき $\zeta_{rl-1}(s_{2l}, s_{(3l,\dots,rl)}; \alpha_{2l}, \alpha_{(3l,\dots,rl)}) \neq 0$ であれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\Big\{ \sup_{1\leq l\leq m} \sup_{s_1 \in K} \big|\zeta_{rl}(s_1 + i\tau, s_{(2l,\dots,rl)}; \alpha_{1l}, \alpha_{(2l,\dots,rl)}) - f_l(s_1)\big| < \varepsilon \Big\} > 0. \tag{2.2}$$

2.2 普遍性からの帰結

次の命題は定理 2.1 から従う．これから $\zeta_r(s_1, s_{(2,\dots,r)}; \alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)})$ の零の存在が導かれる．

Proposition 2.4. $\Re(s_2) > 3/2$, $\Re(s_j) \geq 1$, $3 \leq j \leq r$ を固定する．$N(c,T)$ を $1/2 < \Re(s_1) < 1$, $|\Im(s_1)| < T$ において $\zeta_r(s_1, s_{(2,\dots,r)}; \alpha_1, \alpha_{(2,\dots,r)}) = c$ を充たす s_1 の個数とする．α_1 は超越数で $\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\dots,r)}; \alpha_2, \alpha_{(3,\dots,r)}) \neq 0$ とする．このときある正定数 C_1 と C_2 が存在し，$C_1 T \leq N(c,T) \leq C_2 T$ が成り立つ．

次の命題から関数の関係式の非存在がわかる．

Proposition 2.5. $(\alpha_{2l}, \dots, \alpha_{rl}) \in (0,1]^{rl-1}$ と $\Re(s_{2l}) > 3/2$, $\Re(s_{jl}) \geq 1$, $3l \leq jl \leq rl$, $1 \leq l \leq m$ を充たす $(s_{2l}, \dots, s_{rl}) \in \mathbb{C}^{rl-1}$ を固定し，$0 < \alpha_{1l} < 1$ は代数的独立とする．F_k,

$0 \leq k \leq n$ は連続関数で次の式が全ての s_1 に対して成り立つとする.

$$\sum_{k=0}^{n} s_1^k F_k\big(h_{r1}(s_1, s_{(21,\ldots,r1)}\,;\alpha_{11}, \alpha_{(21,\ldots,r1)}),$$
$$h_{r2}(s_1, s_{(22,\ldots,r2)}\,;\alpha_{12}, \alpha_{(22,\ldots,r2)}), \ldots, h_{rm}(s_1, s_{(2m,\ldots,rm)}\,;\alpha_{1m}, \alpha_{(2m,\ldots,rm)})\big) = 0,$$

$$\zeta_r^{(j)}(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}) := \frac{d^j}{ds_1^j}\zeta_r(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}),$$
$$h_r(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}) := \big(\zeta_r(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}),$$
$$\zeta_r^{(1)}(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}), \ldots, \zeta_r^{(M-1)}(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})\big).$$

このとき $F_k \equiv 0$, $0 \leq k \leq n$ が成り立つ.

3 主結果の証明の概略

ここで述べるのは証明のスケッチであるので, 詳しい証明は [5] を参照して頂きたい.

3.1 証明の準備等

次の補題により Hurwitz 型 Euler-Zagier 多重ゼータ関数の絶対収束域がわかる.

Lemma 3.1. *Hurwitz*型 *Euler-Zagier*多重ゼータ関数 $\zeta_r(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})$ は $\Re(s_1) > 1$, $\Re(s_j) \geq 1$, $2 \leq j \leq r$ で絶対収束する.

主定理の証明には直接は関連しないが, 絶対収束域における $\zeta_r(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})$ の零について以下の命題がある.

Proposition 3.2. $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ が代数的独立ならば, $\zeta_r(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})$ は $\Re(s_1) > 1$, $\Re(s_j) \geq 1$, $2 \leq j \leq r$ で無限個の零点を持つ.

3.2 証明の概略

$\Re(s_j) > 1$, $1 \leq j \leq r$ とする. 調和積公式により

$$\begin{aligned}
&\zeta(s_1\,;\alpha_1)\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\ldots,r)}\,;\alpha_2, \alpha_{(3,\ldots,r)}) \\
=&\sum_{n_1\geq 0,\, n_2>\cdots>n_r\geq 0} \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{s_1}(n_2+\alpha_2)^{s_2}\cdots(n_r+\alpha_r)^{s_r}} \\
=&\Big(\sum_{n_1>\cdots>n_r\geq 0} + \sum{}^{*}\Big)\frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{s_1}\cdots(n_r+\alpha_r)^{s_r}}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

を得る．ただし和$\sum^*$は以下の条件を充たす．

$$n_2 \geq n_1 > n_3 > \cdots > n_r \geq 0, \quad \cdots, \quad n_2 > n_3 > \cdots > n_r \geq n_1 \geq 0. \tag{3.2}$$

一方$\Re(s_j) > 1$, $1 \leq j \leq r$において

$$\zeta_r^*(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}) := \sum{}^* \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{s_1}\cdots(n_r+\alpha_r)^{s_r}},$$

と定義し，領域Zを$1-\delta < \Re(s_1) < 1$, $\Re(s_2) > 1+\delta$, $\Re(s_j) \geq 1$, $3 \leq j \leq r$と定義する．領域Zにおいて$|\zeta_r^*(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})|$は

$$\sum{}^* \frac{1}{(n_1+\alpha_1)^{\sigma_1+\delta}(n_2+\alpha_2)^{\sigma_2-\delta}(n_3+\alpha_3)^{\sigma_3}\cdots(n_r+\alpha_r)^{\sigma_r}} \tag{3.3}$$

より小さいことが，(3.2)からわかる．上の級数は補題2.1からZで絶対収束する．よって$\zeta_r^*(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})$は$Z$で絶対収束する．従って以下の等式を得る．

$$\begin{aligned}&\zeta(s_1\,;\alpha_1)\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\ldots,r)}\,;\alpha_2, \alpha_{(3,\ldots,r)}) = \\ &\zeta_r(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}) + \zeta_r^*(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}), \qquad (s_1, \ldots, s_r) \in Z.\end{aligned}$$

まず定理2.2を証明する．$\zeta_{r-1}(\xi_2, \xi_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_2, \alpha_{(3,\ldots,r)}) = 0$, $\Re(\xi_2) > 1+\delta$, $\Re(\xi_j) \geq 1$, $3 \leq j \leq r$と仮定する．調和積公式により

$$0 = \zeta_r(s_1, \xi_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}) + \zeta_r^*(s_1, \xi_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)}).$$

$\zeta_r^*(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})$は$Z$で絶対収束するので，$|\zeta_r^*(s_1, \xi_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})|$はある定数$M$より小さい．上の等式から$\zeta_r(s_1, \xi_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})$も有界なので普遍性は持たない．

定理2.1の証明も調和積公式を用いる．$\zeta_r^*(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})$は$Z$で絶対収束し，$\zeta(s_1\,;\alpha_1)$は普遍性を持ち，$\zeta_{r-1}(s_2, s_{(3,\ldots,r)}\,;\alpha_2, \alpha_{(3,\ldots,r)}) \neq 0$であるから，Hurwitz型Euler-Zagier多重ゼータ関数$\zeta_r(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})$も普遍性を持つという方針で証明する．厳密な証明には極限定理等の準備が必要になる．

Remark 3.3. α_1が超越数である場合は$\zeta_r^*(s_1, s_{(2,\ldots,r)}\,;\alpha_1, \alpha_{(2,\ldots,r)})$の（普遍性を示すために必要な）極限定理を証明することができる．しかしα_1が超越数でない場合は極限定理の証明は困難である．例えば$\alpha_1 = 1$であるとき*Riemann*ゼータ関数は*Euler*積を持つので，極限定理が証明できるが，多重化した場合，即ち$r \geq 2$であるときは*Euler-Zagier*多重ゼータ関数は*Euler*積を持たないので，極限定理の証明は不可能であると考えられる．

また次の視点からも*Euler-Zagier*多重ゼータ関数の普遍性定理の証明は困難である:

$$0 = 2\zeta_2(s, s\,;1, 1) + \zeta(2s), \qquad 1/2 < \Re(s) < 1$$

の解を求めるという問題を考える．この等式の右辺は調和積公式により$\zeta^2(s)$の零点を求めることになる．従って*Euler-Zagier*多重ゼータ関数の値分布は*Riemann*予想と深く関わり，これが問題を困難にしている原因と思われる．

参考文献

[1] A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta-function, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[2] A. Laurinčikas and R. Garunkštis, The Lerch zeta-function, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[3] K. Matsumoto, "Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions", (in Japanese) *Sūgaku* 53 (2001), 279-296; English Transl.: *Sugaku Expositions* 17 (2004), 51–71.

[4] K. Matsumoto, "Analytic theory of multiple zeta-functions and its application", (in Japanese) *Sūgaku* 59 (2007), no. 1, 24-45.

[5] T. Nakamura, "Zeros and universality for the Euler-Zagier-Hurwitz type of multiple zeta functions", to appear in *Bulletin of London Math.*.

[6] J. Steuding, Value Distributions of L-functions, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1877, Springer-Verlag, 2007.